9.12.2004

# תרגיל מס׳ 8 במושגי יסוד באלגברה לא קומוטטיבית

1. בשאלה זו נגדיר קוהומולוגיה של חבורות.

תהי $A$ חבורה אבלית ותהי $G$ חבורה הפועלת על $A$, כלומר יש פעולה של $G$ על $A$ כקבוצה, ובנוסף מתקיים $g(a+a') = ga + ga'$ לכל $g \in G$ ו- $a, a' \in A$.

א. הראו כי $A$ היא מודול שמאלי מעל חוג החבורה $\mathbf{Z}[G]$.

לכל $n \geq 0$ תהי $C^n(G,A)$ קבוצת הפונקציות $f : G^n \to A$. $C^n(G,A)$ היא חבורה אבלית ביחס לחיבור נקודתי של פונקציות. נוכל לזהות את $C^0(G,A)$ עם $A$.

נגדיר העתקות $d_n : C^n(G,A) \to C^{n+1}(G,A)$ כדלקמן; תהי $f \in C^n(G,A)$, אזי

$$d_n(f)(g_1,\ldots,g_{n+1}) = g_1 f(g_2,\ldots,g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(g_1,\ldots,g_i \cdot g_{i+1},\ldots,g_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(g_1,\ldots,g_n)$$

למשל: $d_0(a)(g) = ga - a$, $d_1(f)(g_1,g_2) = g_1 f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1)$ וכו׳.

ב. הראו כי $d_n$ היא הומומורפיזם של חבורות וכי $d_{n+1} \circ d_n = 0$ לכל $n \geq 0$.

ג. נסמן $Z^n(G,A) = \ker d_n$ (קו-מחזורים) ו- $B^n(G,A) = \operatorname{Im} d_{n-1}$ (קו-שפות).

הראו כי $B^n(G,A) \subseteq Z^n(G,A)$ ולכן מוגדרת המנה $H^n(G,A) = Z^n(G,A) / B^n(G,A)$. זוהי הקוהומולוגיה ה- $n$-ית של ה- $G$-מודול $A$.

ד. הראו כי $H^0(G,A) = A^G = \{a \in A : \forall g \in G \quad ga = a\}$.

ה. הראו כי אם $G$ פועלת טריביאלית (כל איבר פועל כזהות) על $A$, אזי $H^1(G,A) = \hom(G,A)$.

2. תהי $K/k$ הרחבת גלואה סופית של שדות, עם חבורת גלואה $G = Gal(K/k)$.

א. הראו כי פועלת $G$ ע״י אוטומורפיזמים על החבורה החיבורית של $K$ ועל החבורה הכפלית $K^\times$ נותנת מבנה של $G$-מודולים על חבורות אבליות אלה.

ב. הראו כי $H^0(G,K) = k$ ו- $H^0(G,K^\times) = k^\times$.

ג. הוכיחו כי $H^1(G,K^\times) = 0$.

רמז: יהי $f : G \to K^\times$ קו-מחזור. עלינו להראות שהוא קו-שפה, כלומר כי קיים $z \in K^\times$ כך שלכל $s \in G$, $f(s) = z/s(z)$ (משתמשים בכתיב כפלי ב- $K^\times$).

הראו כי קיים $x$ עבורו הביטוי $y = \sum_{s \in G} f(s)s(x)$ אינו מתאפס ואח״כ חשבו את $s(y)$.

ד. הסיקו את משפט 90 של הילברט: אם $G$ ציקלית עם יוצר $s$ ו- $x \in K$ עם נורמה 1, אזי קיים $y \in K^\times$ כך ש- $x = y/s(y)$.

רמז: בנו קו-מחזור מתאים והשתמשו בחלק ג׳.