Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann
WS 2011/12

Musterlösung zur Klausur Lineare Algebra I

Aufgabe 1:
Zunächst berechnen wir eine Basis von $\operatorname{Ker} f$. Das Gaussverfahren liefert (zum Beispiel):

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & -1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -6 \\ 5 & 4 & -1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -8 \\ 0 & -1 & 4 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Basis von $\operatorname{Ker} f$ ist also z.B.:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aus der Dimensionsformel folgt, dass das Bild von f die Dimension 2 haben muss. Also bilden zwei linear unabhängige Spaltenvektoren von A eine Basis von $\operatorname{Im} f$. Eine solche Basis ist z.B. durch

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Aufgabe 2:

(i) Die Vektoren $v_1, \ldots, v_{n+1}$ sind linear abhängig, da $n+1$ Vektoren in einem n-dimensionalen Vektorraum immer linear abhängig sind.
Folglich existieren $\alpha_1 \ldots, \alpha_{n+1} \in K$, sodass $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i v_i = 0$, aber nicht alle $\alpha_i = 0$. Wir zeigen durch Widerspruch, dass alle $\alpha_i \neq 0$ sind:

Sie $\alpha_j = 0$ für einen Index j. Dann ist $\sum_{i=1,\ i\neq j}^{n+1} \alpha_i v_i = 0$ eine nicht-triviale Darstellung der 0 durch die Vektoren $\{v_1, \ldots, v_{n+1}\} \backslash \{v_j\}$. Es folgt, dass diese Teilmenge linear abhängig ist. Nach Annahme ist diese Teilmenge aber auch ein Erzeugendensystem des n-dimensionalen Vektorraums V, und somit eine Basis, da sie aus n-Elementen besteht. Widerspruch.

(ii) Betrachte die lineare Abbildung $f : K^{n+1} \to V$, die durch

$$f : (a_1, \ldots, a_{n+1}) \longmapsto \sum_{i=1}^{n+1} a_i v_i$$

gegeben ist. Da $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V ist, ist die Abbildung f surjektiv und es gilt $\dim \operatorname{Ker} f = \dim K^{n+1} - \dim V = 1$. Ferner ist $0 \neq (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \in \operatorname{Ker} f$, also ist $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$ eine Basis von $\operatorname{Ker} f$. Es folgt, dass jeder Vektor $(\beta_1, \ldots, \beta_{n+1}) \in \operatorname{Ker} f$ von der Form $\gamma\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$ für ein $\gamma \in K$ ist.

Aufgabe 3:

(i) $\chi_A = X^3 - 2X^2 + 4X - 8 = (X-2)(X^2+4) = (X-2)(X-2i)(X+2i) \in \mathbb{C}[X]$.

(ii) Die Eigenwerte von A sind: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 2i,\ \lambda_3 = -2i$. Die entsprechenden Eigenräume sind:

$$V(A,2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,\ V(A,2i) = \left\langle \begin{pmatrix} 2-i \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,\ V(A,-2i) = \left\langle \begin{pmatrix} 2+i \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(iii) Die Matrix A ist über $\mathbb{R}$ nicht diagonalisierbar, da das charakteristische Polynom über $\mathbb{R}$ nicht in Linearfaktoren zerfällt.

Aufgabe 4:
Beweis durch vollständige Induktion:
Für $n = 2$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & b_2 \\ c_2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - b_2 c_2.$$

Induktionsschritt: Die Behauptung gelte für $n-1$. Entwickeln nach der ersten Spalte ergibt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_n \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_2 \\ c_n & c_{n-1} & \dots & c_2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & b_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & b_2 \\ c_{n-1} & \dots & c_2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^n c_n \cdot \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_n \\ 1 & \dots & 0 & b_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & b_2 \end{pmatrix}$$

Mit InduktionsVoraussetzung und Entwickeln nach der ersten Zeile ergibt dies

$$= 1 - b_2c_2 - \dots - b_{n-1}c_{n-1} + (-1)^n c_n \cdot (-1)^{n-1} b_n \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = 1 - b_2c_2 - \dots b_{n-1}c_{n-1} - b_n c_n.$$

Aufgabe 5:
Sei $v, f(v), \dots f^{n-1}(v)$ eine Basis von V. Dann sind die Bilder dieser Basisvektoren ein Erzeugendensystem von $\operatorname{Im} f$. Es folgt, dass das Bild von f durch $f(v), f^2(v), \dots, f^{n-1}(v), f^n(v)$ erzeugt wird. Nach Voraussetzung ist $f^n(v) = 0$ und $f(v), \dots, f^{n-1}(v)$ linear unabhängig. Folglich ist $f(v), \dots f^{n-1}(v)$ eine Basis von $\operatorname{Im} f$ und es gilt

$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim V - \dim \operatorname{Im} f = n - (n-1) = 1.$$

Sei nun $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ und sei $U_i = \operatorname{Im} f^i$. Dann gilt $U_{i+1} \subset U_i$ und $f|_{U_i} : U_i \to U_{i+1}$ ist surjektiv. Die Dimensionsformel ergibt

$$\dim U_{i+1} = \dim U_i - \dim(\operatorname{Ker} f \cap U_i),$$

also $\dim U_{i+1} \in \{\dim U_i, \dim U_i - 1\}$. Falls $\dim U_{i+1} = \dim U_i$, so folgt $U_i = U_{i+1}$ und (vergleiche die Musterlösung zu Aufgabe 6 der Probeklausur) $U_i = U_{i+1} = \dots = U_n = 0$. Daher gilt

$\dim \operatorname{Im} f^i = n-i$ und (nach Dimensionasformel) $\dim \operatorname{Ker} f^i = i$. Also haben wir die folgende Kette von Inklusionen:

$$V \supsetneq \operatorname{Ker} f^{n-1} \supsetneq \operatorname{Ker} f^{n-2} \supsetneq \cdots \supsetneq \operatorname{Ker} f \supsetneq 0.$$

Sei $v \in V \backslash \operatorname{Ker} f^{n-1}$. Wir zeigen, dass $v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)$ linear unabhängig ist, also eine Basis bildet, da V die Dimension n hat. Sei

$$0 = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(v)$$

eine Linearkombination der 0. Wir zeigen mit vollständiger Induktion, dass alle $\alpha_i = 0$ sind.
Induktionsanfang: Nach Annahme gilt $f^{n-1}(v) \neq 0$ und $f^n(v) = 0$. Es folgt:

$$0 = f^{n-1}\big(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(v)\big) = \alpha_0 f^{n-1}(v),$$

und somit $\alpha_0 = 0$.
Induktionsschritt: Sei $\alpha_0 = \cdots = \alpha_{j-1} = 0$. Dann ist

$$0 = \sum_{i=j}^{n-1} \alpha_i f^i(v),$$

und somit

$$0 = f^{n-j-1}\big(\sum_{i=j}^{n-1} \alpha_i f^i(v)\big) = \alpha_j f^{n-1}(v),$$

also $\alpha_j = 0$.
Es folgt $\alpha_0 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$. Also ist $v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)$ linear unabhängig.

Aufgabe 6:

Es gilt $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$, also $\operatorname{rg}(g \circ f) = \dim \operatorname{Im}(g \circ f) \leq \dim \operatorname{Im} g = \operatorname{rg} g$.
Ferner gilt $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$, also $\operatorname{rg}(g \circ f) = \dim V_1 - \dim \operatorname{Ker}(g \circ f) \leq \dim V_1 - \dim \operatorname{Ker} f = \operatorname{rg} f$.
Es folgt:

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min(\operatorname{rg} g,\ \operatorname{rg} f).$$

Die Dimensionsformel, angewendet auf $g|_{\operatorname{Im} f}$ liefert:

$$\dim \operatorname{Im}(g|_{\operatorname{Im} f}) = \dim \operatorname{Im} f - \dim \operatorname{Ker}(g|_{\operatorname{Im} f}).$$

Nun gilt $\operatorname{Im}(g|_{\operatorname{Im} f}) = \operatorname{Im}(g \circ f)$ und $\operatorname{Ker}(g|_{\operatorname{Im} f}) = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$. Durch nochmaliges Anwenden der Dimensionsformel folgt:

$$\operatorname{rg}(g \circ f) = \dim \operatorname{Im} f - \dim \operatorname{Ker}(g|_{\operatorname{Im} f}) \geq \operatorname{rg} f - \dim \operatorname{Ker} g = \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - \dim V_2.$$

Aufgabe 7:

1) falsch
2) wahr
3) falsch
4) wahr
5) wahr
6) wahr
7) falsch