Dr. Ulrich Görtz **WS 2005/06**

Übungen zur Algebraischen Geometrie

Blatt 4, Abgabe am 16.11.2005

Aufgabe 13

Sei X ein topologischer Raum, und sei $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ eine Überdeckung durch offene Teilmengen.

a) Seien $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ Garben auf X, und seien $\varphi_i\colon \mathcal{F}|_{U_i} \longrightarrow \mathcal{G}|_{U_i}$ Morphismen von Garben auf U_i, so dass für alle i, j die Einschränkungen $\varphi_i|_{U_i\cap U_j}$ und $\varphi_j|_{U_i\cap U_j}$ übereinstimmen. Zeige, dass es genau einen Garbenmorphismus $\varphi\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ gibt, so dass $\varphi|_{U_i} = \varphi_i$ für alle i.

b) Für alle i sei $\mathcal{F}_i$ eine Garbe auf U_i. Für alle i, j seien Isomorphismen $\varphi_{ij}\colon \mathcal{F}_i|_{U_i\cap U_j} \longrightarrow \mathcal{F}_j|_{U_i\cap U_j}$ gegeben, und es gelte die Kozykelbedingung

$$\varphi_{jk}|_{U_i\cap U_j\cap U_k} \circ \varphi_{ij}|_{U_i\cap U_j\cap U_k} = \varphi_{ik}|_{U_i\cap U_j\cap U_k} \text{ für alle } i, j, k.$$

Zeige, dass es eine Garbe $\mathcal{F}$ auf X zusammen mit Isomorphismen $\psi_i\colon \mathcal{F}|_{U_i} \to \mathcal{F}_i$ gibt, so dass für alle i, j gilt: $\varphi_{ij} \circ \psi_i|_{U_i\cap U_j} = \psi_j|_{U_i\cap U_j}$. Zeige ferner, dass $\mathcal{F}$ bis auf Isomorphismus eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 14

Zeige, dass die offene Unterprävarietät $\mathbb{A}^2(k)\setminus\{0\} \subset \mathbb{A}^2(k)$ keine affine Varietät ist.

Aufgabe 15

Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ eine Prävarietät über k, und sei $x \in X$. Zeige, dass eine natürliche Bijektion besteht zwischen der Menge der Primideale des Halms $\mathcal{O}_{X,x}$ und den abgeschlossenen Unterprävarietäten von X, die x enthalten. (*Hinweis:* Benutze Prop. 3.11 iv) in [Atiyah, Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*].)

Aufgabe 16

Sei $\varphi\colon \mathbb{A}^n(k) \longrightarrow \mathbb{A}^n(k)$ der durch die Polynome $f_1, \dots, f_n \in k[X_1, \dots, X_n]$ gegebene Morphismus.

Sei $J = \det((\partial f_i/\partial X_j)_{i,j}) \in k[X_1, \dots, X_n]$ das Jacobische Polynom von φ; hier sei $\partial/\partial X_j$ die (formale) partielle Ableitung nach X_j.

a) Zeige: ist φ ein Isomorphismus, so ist J ein konstantes Polynom $\neq 0$.

b) Zeige, dass die Umkehrung im allgemeinen falsch ist. Wie ist es im Fall $k = \mathbb{C}$, $n = 1$? (Der Fall $k = \mathbb{C}$, $n = 2$, ist ein offenes Problem; die *Jacobische Vermutung* besagt, dass die Umkehrung in diesem Fall richtig ist.)