

**Übungen zur Algebraischen Geometrie***Blatt 10, Abgabe am 11.01.2006***Aufgabe 37**

Sei  $X$  ein Schema. Zeige, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

- i)  $X$  ist zusammenhängend.
- ii) Es existiert in  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  kein Element  $e \neq 0, 1$  mit  $e^2 = e$ .
- iii) Es existiert keine Zerlegung  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = R_1 \times R_2$  in von Null verschiedene Ringe  $R_1, R_2$ .

**Aufgabe 38**

a) Sei  $X$  ein Schema,  $x \in X$ . Sei  $Y = \text{Spec } \mathcal{O}_{X,x}$  und sei  $y \in Y$  der abgeschlossene Punkt. Zeige, dass es einen natürlichen Morphismus  $Y \rightarrow X$  gibt, der  $y$  auf  $x$  abbildet und dadurch eindeutig bestimmt ist, dass er auf den Halmen in  $y$  bzw.  $x$  die Identität induziert.

b) Zeige, dass das Bild des in a) definierten Morphismus genau aus den Punkten besteht, die zu  $x$  *spezialisieren*, d. h. in deren Abschluss  $x$  liegt.

**Aufgabe 39**

a) Sei  $X$  ein quasi-kompaktes Schema. Zeige, dass  $X$  einen abgeschlossenen Punkt besitzt.

b) Sei  $X$  ein quasi-kompaktes Schema, das genau einen abgeschlossenen Punkt hat. Zeige, dass  $X$  isomorph ist zum Spektrum eines lokalen Ringes.

**Aufgabe 40**

Sei  $R$  ein Ring und  $\mathfrak{a} \subseteq R$  ein Ideal. Zeige, dass der von der Projektion  $R \rightarrow R/\mathfrak{a}$  induzierte Morphismus  $\text{Spec } R/\mathfrak{a} \rightarrow \text{Spec } R$  eine abgeschlossene Immersion ist.