Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 11
Lineare Algebra 1

Aufgabe 1. (4 Punkte) *Die allgemeine lineare Gruppe*
Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$ eine positive natürliche Zahl.

(a) Zeige, dass die Menge $\mathrm{GL}(n, K)$ der invertierbaren $n \times n$ Matrizen über K zusammen mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe bildet.

(b) Sei $m \geq n$ eine natürliche Zahl. Finde eine Matrix $A \in M(n \times m, K)$ die ein Rechtsinverses aber kein Linksinverses bezüglich Matrixmultiplikation hat.

(c) Falls $n \geq 2$, kann es dann ein Beispiel wie in Teil (b) für ein m mit $1 \leq m < n$ geben?

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Gauß–Verfahren*
Für einen Körper K betrachte man die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(3 \times 4, K).$$

Man verwende in den folgenden beiden Fällen jeweils das Gauß–Verfahren um die Matrix A auf Zeilenstufenform zu bringen und um den Rang von A zu berechnen.

(a) $K = \mathbb{Q}$;

(b) $K = \mathbb{F}_5$, der Körper mit fünf Elementen.

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Eins + Nilpotent = Invertierbar*
Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$ eine positive natürliche Zahl. Sei $N \in M(n \times n, K)$ eine nilpotente Matrix, d.h. eine Matrix N sodass es ein $k \geq 1$ mit $N^k = 0$ gibt.

(a) Zeige, dass die Summe $A := \mathbb{1}_n + N$ invertierbar ist, wobei $\mathbb{1}_n$ die $n \times n$ Einheitsmatrix bezeichne.

(Tipp: Lassen Sie sich von der Formel $x^m - 1 = (x-1)\sum_{i=0}^{m-1} x^i$ inspirieren.)

(b) Zeige oder widerlege, dass für jede invertierbare Matrix $C \in \mathrm{GL}(n, K)$ die Matrix $C + N$ invertierbar ist.

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Exponent und Rang einer nilpotenten Matrix*
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine positive natürliche Zahl. Sei $N \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine nilpotente Matrix, d.h. eine Matrix N sodass es ein $k \geq 1$ mit $N^k = 0$ gibt. Sei $k_0 \geq 1$ die kleinste natürliche Zahl mit $N^{k_0} = 0$. Zeige, dass $k_0 \leq \mathrm{rg}(N) + 1$ gilt, wobei $\mathrm{rg}(N)$ den Rang von N bezeichne.

Abgabe ist am **Freitag 20. Januar 2017**, vor (!) der Vorlesung, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr.

Allgemeine Bemerkungen:

- **Wichtig:** Die Abgabe ist ab jetzt auch in Gruppen von zwei oder drei Personen erlaubt; allerdings muss ersichtlich sein, dass jedes Mitglied der Gruppe die Lösung von mindestens einer Aufgabe aufgeschrieben hat. Bitte vergessen Sie dabei nicht den **Name und die Nummer des Tutoriums** von jedem Gruppenmitglied auf dem abgegebenen Blatt anzugeben, sodass die Punkte aller Mitglieder richtig eingetragen werden können.

- Wenn nicht explizit ausgeschlossen, dürfen Sie Sätze und Resultate aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, müssen aber dabei immer die Nummer oder den Namen des Satzes, oder aber die Aussage des Satzes, angeben, sodass klar ist, welches Resultat Sie verwenden möchten.

- Bei Fragen zu diesem Übungszettel, wenden Sie sich bitte an Ihren Tutor, oder an den Assistenten (schreied@math.uni-bonn.de).

- Die neuen Übungsblätter können immer Freitags ab spätestens 12 Uhr von der Homepage der Vorlesung heruntergeladen werden: `http://www.math.uni-bonn.de/ag/la2016/LA1.htmpl`

- Lösungen zu den Übungszettel müssen Freitags **vor der Vorlesung**, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr, eingereicht werden.

  Die Teilnehmer der Tutorien 5, 6, 7 und 8 werden gebeten, die Übungszettel direkt bei Ihrem Tutor während des Freitags Tutoriums von 8:00-10:00 Uhr abzugeben.

- Die korrigierten Übungszettel bekommen Sie in Ihrem Tutorium zurück; dort werden auch die Lösungen zu den Aufgaben besprochen.

- Für die Zulassung zur Klausur sind **mindestens 50%** der Übungspunkte erforderlich.

- Es wird ein **Help Desk** für Fragem zur Vorlesung und den Übungen angeboten. Dort steht Ihnen Montags 15:00–18:00 sowie Donnerstags 14:00–17:00 Uhr jeweils im Raum N1.002 (Endenicher Allee 60, Nebengebäude) ein Student eines höheren Semesters für Fragen zur Verfügung.

- Mehr Details finden Sie auf der oben genannten Homepage der Vorlesung.